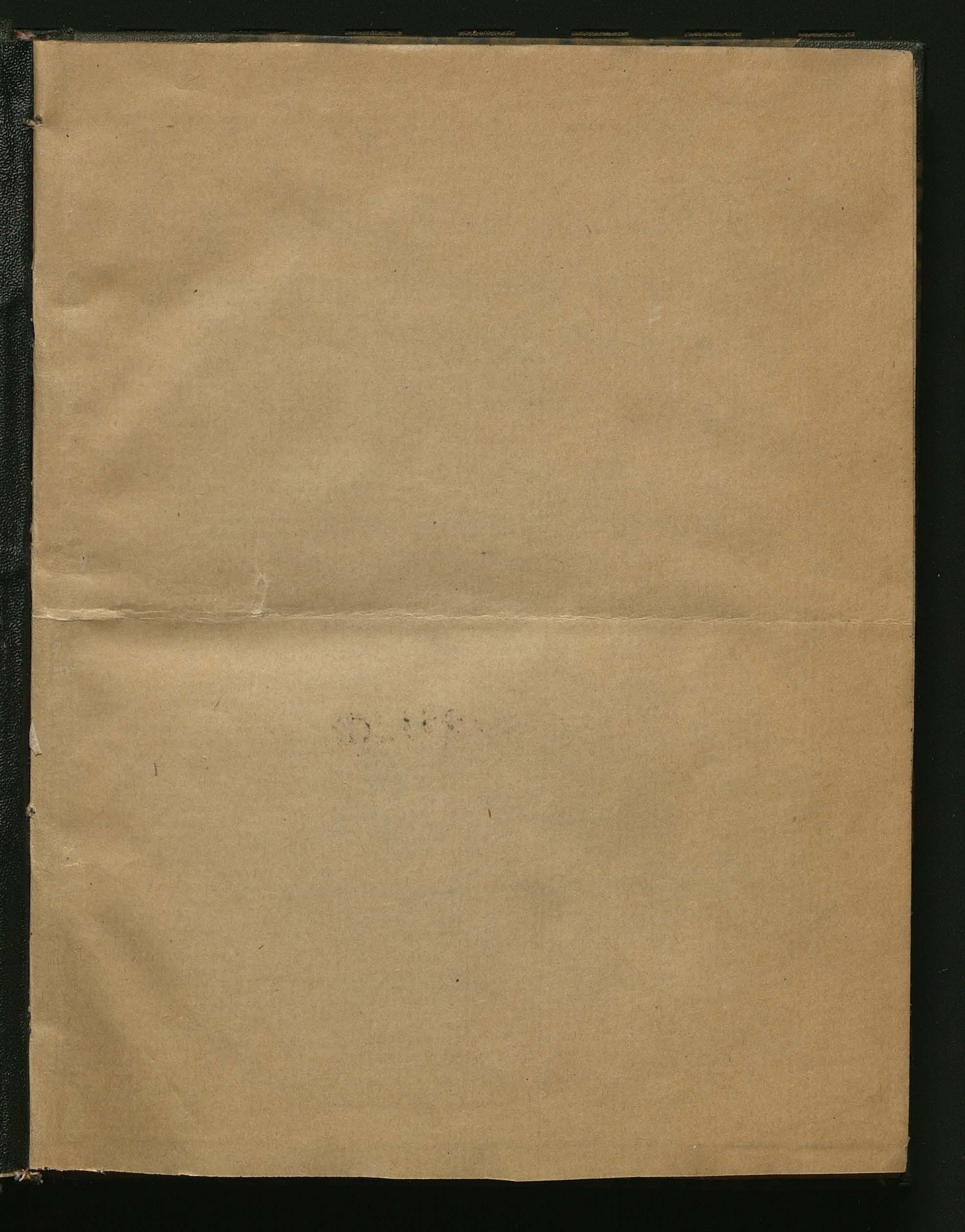

V
B
J
C



DISSERTATIO

De *Methodo demonstrativa perfectè quadrandi Circulum*, & de Objectionibus contra eam factis.

1. Cum edita hac *Methodo demonst:* nihil magis in optatis haberem, quàm ut doctas nanciscerer objectiones, ope quarum ejus demonstrationes vel meliùs firmare, vel firmiores condere valerem, voti autem mei non fierem compos; constitui, communicata intentione mea cum Amico Judicii præstantis, anonymè præmium 50 Aureorum pro eo, qui præfatum scriptum directè & solidè refutaret, h. e. qui illud esse falsum, me convinceret argumentis invictis. Et ut consequerer finem mihi propositum, curavi id Anno 1775 Novis publicis inserendum. Obtulerunt se 5 Competitores, qui ad obtinendum præmium, mecum in arenam descendere erant parati, nempe: *Stetinii* Agrimensor; *Berolini* Magister Arithmetices; *Osvietimanii* in *Moravia* Parochus; *Varsaviæ* Professor Phil. & *Heibachii*, quod est oppidum ad *Mœnum*, Organarius, qui autem non fuit susceptus. Priores duo, acceptis responsis meis, silentium servarunt perpetuum; tertius autem magis confidens in bonitate causæ suæ, & rejiciens argumenta mea, omnino ab Academia *Germaniæ* judicari voluit; & cum id non fuisset consecutus, rogavit per literas Illustrissimum Baronem R. in hac Sede Regia tunc fungentem officio Legati S. C. M. ut auctoritatem suam interponeret, eique ad adipiscendos 50 Aureos anonymè promissos auxiliatrices porrigeret manus: id quod me permovit ad notificandum Illustr: Legato, me esse Authorem præmii statuti, & ad exponendum illi statum quæstionis, quo intellecto mihi respondit: *Indulgerem precibus Parochi, qui est subditus Imperatricis Reginæ, si pecunia ei transmittenda mihi concrederetur; ast quoniam adhuc sub Judice lis est; frustra auxilium meum implorat: nam controversiis literatorum me non immisceo.* Cl. Parochus credebat æquè, ac Cl. Professor, quòd quadrare figuram esset perinde, ac invenire aream ejus in numero perfectè quadrato; ex quo porro conclusit, Quadraturam meam esse falsam, quia nullus Circulorum à me quadratorum esset numerus perfectè quadratus. Deinde negabat, lunulam esse æqualem quadrato radii, & quidem ideò, quia quadrata Cathetorum essent majora quadrato hypothenusæ; & his præclaris principiis innitebantur reliquæ ejus objectiones. Quartus Antagonistarum meorum adeò erat persvasus, se præmium meruisse, ut jam A. 1776 mihi ita scripserit: *lege attenta mente conclusionem mei scripti:* Habes Vir Cl. *& intelliges, quam ob causam potueram exigere præmium designatum illico post scriptum 1mum, si ad nostram causam decidendam Judices bene Matheseos periti adessent* Varsaviæ, *quod suspicabar.* Deinde aliquo tempore post coram nonnullis prorupit in hanc exclamationem: *Quid diceretur de me, si Extraneus vinceret Polonum!* Ut itaque de argumentis ejus rectè judicari queat, præmitto explanationem perspicuam tam Theorematis 2 *Methodi*: *Segmenta sunt ad lunulas ut* 9:16, quàm

quàm *confirmationis* ejus in Scholio 2 ibidem contentæ. Theorema ipſum eſt igitur ſic intelligendum.

2. Poſita diametro $= a$, & ratione ejus ad peripheriam $= 1 : p$, erit lunula $= \frac{1}{4} a a$, & periph: $= a p$, quæ multiplicata per 8vam partem diametri, h. e. per $\frac{1}{8} a$, exhibet ſemicirculum $\frac{1}{8} aap$, qui cum ſit conflatus ex lunula & ſegmento; palam eſt, ablatâ ex eo lunulâ, relinqui ſegmentum $\frac{1}{8} aap - \frac{1}{4} aa = \frac{1}{4} aa . (\frac{1}{2} p - 1)$; ex quo liquet, ſegmenta eſſe facta ex lunulis in exponentem, conſequenter his proportionalia. Sit jam $1 : p = 7 : 22$, erit $p = \frac{22}{7}$, & $\frac{1}{2} p - 1 = \frac{11}{7} - \frac{7}{7} = \frac{4}{7}$. Ergo ſegmenta exceſſiva ſunt ad lunulas ſuas, ut $4 : 7$. Sit porro $1 : p = 9 : 28$, erit $p = \frac{28}{9}$, & $\frac{1}{2} p - 1 = \frac{14}{9} - \frac{9}{9} = \frac{5}{9}$. Ergo ſegmenta defectiva ſunt ad lunulas ſuas, ut $5 : 9$. Jam cum poſitis diametris $= 6, 5, 2$ & 1, lunulæ ipſis reſpondentes ſint $9, \frac{25}{4}, 1$ & $\frac{1}{4}$; inferatur 1*mo:* ut $9 : 5$, ita lunula 1ma 9 ad ſegmen. ſuum defectiv. $\frac{45}{9}$; & ut $7 : 4$, ita lunula 9 ad ſegmentum exceſſivum $\frac{36}{7}$. 2*do:* ut $9 : 5$, ita lunula 2da $\frac{25}{4}$ ad ſegmen: defectivum, h. e. multiplicando 1mum & 3tium terminum per 4, ut $36 : 5$, ita 25 ad ſegm. defect. $\frac{125}{36}$; & ut $7 : 4$, ita lunula $\frac{25}{4}$ ad ſegm. exces. $\frac{100}{28}$. 3*tio.* ut $9 : 5$, ita lunula 3tia 1 ad ſegm. defect. $\frac{5}{9}$, & ut $7 : 4$, ita lunula 1 ad ſegm. exces. $\frac{4}{7}$. 4*to:* ut $9 : 5$, ita lunula 4ta $\frac{1}{4}$ ad ſegm. defect. $\frac{5}{36}$; & ut 7 ad 4, ita lunula $\frac{1}{4}$ ad ſegm. exces. $\frac{4}{28}$. Deinde convertatur quodlibet par ſegmentorum falſorum in fractiones, quarum denominator communis ſit 16, vel multiplus de 16, ſi diameter eſt numerus par; ſi autem eſt numerus impar, debet denominator communis eſſe 64, vel multiplus de 64, qui poteſt etiam ſemper eſſe 64, ſive diameter ſit numerus par, ſive impar. Cum itaque diameter 1ma 6 ſit numerus par; aſſumatur denominator communis $48 = 16 \times 3$ inferendo: ut denominator 9 ſegmenti defect. ad numeratorem ſuum 45, ita denominator 48 ad numeratorem quæſitum 240; & ut denominator 7 ſegment. exces. ad numeratorem ſuum 36, ita denominator communis 48 ad numeratorem quæſitum $246 + \frac{6}{7}$. Addito deinde 1 ad numeratorem priorem, & omiſſa fractione $\frac{6}{7}$ ex poſteriore, ſubſcribatur utrique denominator communis 48; quo facto prodeunt fractiones $\frac{241}{48}$ & $\frac{246}{48}$, quarum prior eſt paulò major ſegmento defectivo, & poſterior aliquantò minor exceſſivo. Sunt igitur inter utrumque ſegmentum 6 fractiones intermediæ, ad quas lunula 1ma eſt, ut $9 : \frac{241}{48} : \frac{242}{48} : \frac{243}{48}$ &c. h. e. multiplicando omnes terminos per 48, ut $432 : 241 : 242 : 243$ &c. & dividendo porro per menſuram communem maximam 27, ut $16 : 8\frac{25}{27} : 8\frac{26}{27} : 9$ &c. Itaque ſola 3tia ratio $9 : \frac{243}{48}$, eſt $= 16 : 9$. Contra, quoniam diameter 2da 5 eſt numerus impar, aſſumatur denominator communis 64, & invenientur ſimili modo inter ſegmentum defect. $\frac{125}{36}$ & exceſſivum $\frac{100}{28}$ 6 fractiones intermediæ, quarum 1ma eſt $\frac{223}{64}$, & ultima $\frac{228}{64}$. Eſt igitur lunula 2da ad has 6 fractiones, ut $\frac{25}{4} : \frac{223}{64} : \frac{224}{64} : \frac{225}{64}$ &c. h. e. multiplicando ubique per 64, ut $400 : 223 : 224 : 225$ &c. ac dividendo per 25, ut $16 : 8\frac{23}{25} : 8\frac{24}{25} : 9$ &c. Eſt igitur ſola 3tia ratio $\frac{25}{4} : \frac{225}{64} = 16 : 9$. Jam cum diame-

ter

ter 3tia 2 ſit numerus par, aſſumatur denominator communis $624 = 16 \times 39$, & reperientur inter ſegmentum defect. $\frac{5}{9}$ & exceſſivum $\frac{4}{7}$ 10 fractiones intermediæ, quarum 1ma eſt $\frac{347}{624}$ & ultima $\frac{356}{624}$; ad quas lunula 3tia eſt, ut $1 : \frac{347}{624} : \frac{348}{624} : \frac{349}{624} : \frac{350}{624} : \frac{351}{624}$ &c. h. e. multiplicando ubique per 624, ut $624 : 347 : 348 : 349 : 350 : 351$ &c. & dividendo deinde per 39, ut $16 : 8\frac{35}{39} : 8\frac{36}{39} : 8\frac{37}{39} : 8\frac{38}{39} : 9$ &c. Itaque ſola 5ta ratio $1 : \frac{351}{624}$ eſt $= 16 : 9$. Quoniam denique diameter 4ta 1 eſt numerus impar, aſſumatur denominator communis $1280 = 64 \times 20$, & reperientur inter ſegm. defect. $\frac{5}{36}$, & exceſſivum $\frac{4}{28}$ fractiones 5 intermediæ, quarum 1ma eſt $\frac{178}{1280}$ & ultima $\frac{182}{1280}$, ad quas lunula 4ta eſt, ut $\frac{1}{4} : \frac{178}{1280} : \frac{179}{1280} : \frac{180}{1280}$ &c. h. e. multiplicando omnes terminos per 1280, ut $320 : 178 : 179 : 180$ &c. ac dividendo deinde per 20, ut $16 : 8\frac{18}{20} : 8\frac{19}{20} : 9$ &c. Eſt igitur ſola 3tia ratio $\frac{1}{4} : \frac{180}{1280} = 16 : 9$. Jam cum nulla alia ratio quadruplici ſeriei fractionum ſit communis, niſi $16 : 9$, & eadem ſemper emergat; ſive denominatores communes 48, 64, 624 & 1280 per alios numeros multiplicentur, ſive ubique denominator communis 64 adhibeatur; dubitari nequit, quin ſegmenta ſint ad lunulas ſuas, ut $9 : 16$. Pari modo reperiuntur ſegmenta $\frac{441}{64}$ & $\frac{729}{64}$ reſpondentia diametris $= 7$ & 9, & innumera alia.

3. Per lunulam *defectivam* intelligo in Scholio 2do *Methodi* eam, quæ eſt ad quadratum diametri, ut $143 : 576$; & per *exceſſivam* illam, quæ eſt ad quadratum diametri, ut $113 : 448$, Quare aſſumpta diametro $= 7$, lunula defectiva prodit $= \frac{7007}{576}$ & exceſſiva $= \frac{5537}{448}$. Poſita autem diametro $= 9$, reperitur lunula *defectiva* $\frac{11583}{576}$, & *exceſſiva* $\frac{9153}{448}$. Ut igitur 2da pars dicti Scholii ritè percipiatur, convertatur utrumque par lunularum falſarum in fractiones, quarum denominator communis ſit 64, ita inter primum par emergent 12 fractiones intermediæ, quarum prima eſt $\frac{779}{64}$ & ultima $\frac{790}{64}$, ad quas ſegmentum verum ejusdem diametri eſt, ut $\frac{441}{64} : \frac{779}{64}$ &c. h. e. multiplicando ubique per 64, ut $441 : 779 : 780 : 781 : 782 : 783 : 784$ &c. & dividendo deinde per 49, ut $9 : 15\frac{44}{49} : 15\frac{45}{49} : 15\frac{46}{49} : 15\frac{47}{49} : 15\frac{48}{49} : 16$. Itaque ſola 6ta ratio $\frac{441}{64} : \frac{784}{64}$ eſt $= 9 : 16$. Inter 2dum par lunularum falſarum reperiuntur 20 fractiones intermediæ, quarum 1ma eſt $\frac{1288}{64}$ & ultima $\frac{1307}{64}$, ad quas ſegmentum verum eſt, ut $\frac{729}{64} : \frac{1288}{64}$ &c. h. e. multiplicando omnes terminos per 64, ut $729 : 1288 : 1289 : 1290 : 1291 : 1292 : 1293 : 1294 : 1295 : 1296$ &c. & dividendo deinde per 81, ut $9 : 15\frac{73}{81} : 15\frac{74}{81} : 15\frac{75}{81} : 15\frac{76}{81} : 15\frac{77}{81} : 15\frac{78}{81} : 15\frac{79}{81} : 15\frac{80}{81} : 16$ &c. Eſt ergo ſola 9na ratio $729 : 1296 = 9 : 16$. Jam cum in utraque ſerie nullæ aliæ fractiones ad ſegmenta $\frac{441}{64}$ & $\frac{729}{64}$ habeant rationem $= 16 : 9$, niſi $\frac{784}{64}$ & $\frac{1296}{64} = \frac{49}{4}$ & $\frac{81}{4}$; legitimè concludi poteſt, eas eſſe lunulas veras (neque de hoc dubitare licet, ſiquidem ex Theoremate Hippocratis liquet, lunulas, reſpondentes diametrorum quadratis 49 & 81, eſſe reverà $\frac{49}{4}$ & $\frac{81}{4}$) conſequenter etiam ſegmenta $\frac{441}{64}$ & $\frac{729}{64}$, pro Antecedentibus poſita, eſſe vera: nam ſi eadem quadrata diametrorum ſucceſſivè comparentur cum

iisdem fractionibus inter lunulas falsas intermediis; patebit 49 : $\frac{784}{64}$ esse $= 81 : \frac{1296}{64} = 64 : 16$, consequenter fractiones $\frac{784}{64}$ & $\frac{1296}{64}$ esse lunulas veras, quæ cum ideo prodeant, quia quadrata diametrorum pro Antecedentibus posita, sunt justæ magnitudinis; necesse est, ut etiam segmenta $\frac{441}{64}$ & $\frac{729}{64}$ pro Antecedentibus assumpta, sint justa, quia aliàs ex eorum comparatione cum fractionibus tam diversis nunquam possent determinari lunulæ veræ. Præmissis hisce explanationibus, accedo ad solvendas objectiones contra *Methodum demonstrativam* factas.

4. Cl. Professor *Koc* in sua *Expositione brevi* §. 1. inquit: *Fundamentum præcipuum Auctoris* Meth. demonst. *est hæc propositio:* Peripheria est tripla diametri cum minori, quàm $\frac{1}{7}$ & majori quàm $\frac{1}{9}$ ejusdem, *ex qua ulterius intulit, quòd ratio vera diametri ad periph. debeat esse media inter has duas* 7 : 22 *&* 9 : 28, *hancque non posse esse aliam, quam* $1 : 3\frac{1}{8}$; & ibidem sub nota *a* fatur: *Tum ratio* $1 : 3\frac{1}{8}$ *esset vera, si tantundem peccaretur excessu adhibendo rationem* $1 : 3\frac{1}{7}$, *quantum erratur per defectum ponendo* $1 : 3\frac{1}{9}$. Ad quod ipsi respondi 1*mo:* Præmium fuit constitutum pro refutatione *Methodi*, non autem illius propositionis (*peripheria est diametri tripla cum* $\frac{1}{8}$) quæ nullatenus ad eam spectat (*quia in* Methodo *est solùm ex ratione segmenti ad lunulam* = 9 : 16 *deducta, non autem seorsim demonstrata*). 2*do:* Indignus essem nomine Geometræ, si fecissem illationem tam absurdam, cujus falsitatem jam alibi ostendi, & quæ mox denuo patebit; hanc falsitatem autem ita ostendi: si illa tua illatio esset vera, deberet $\frac{1}{8}$ esse media arithmeticè proportionalis inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$; sed inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9} = \frac{9}{63}$ & $\frac{7}{63} = \frac{16}{63}$ (ut patet ex divisione hujus summæ per 2) media arithmeticè proportionalis est $\frac{8}{63}$, non autem $\frac{1}{8} = \frac{8}{64}$: ergo illatio tua est falsa. Enimverò Adversarius, responsum meum pro more suo in sensum alienum detorquens, in epistola, 30 Aprilis Anni 1777 contra me edita, illud ita interpretatur: *Tria sunt* inquit, *in* Refutatione *Auctoris*, *quæ aliquam considerationem merentur.* 1. *Recessus à præcipuo fundamento suorum scriptorum:* Peripheria est tripla diametri cum minori, quàm $\frac{1}{7}$ & majori quàm $\frac{1}{9}$ ejusdem, *factus in hæc verba:* Præmium fuit constitutum pro refutatione Methodi, non autem illius propositionis, quæ nullatenus ad eam spectat. 2. *Ejurata mala illatio ex eodem fundamento facta:* Indignus essem nomine Geometræ, si fecissem illationem tam absurdam. 3. *Æquatio illa, per quam rationem segmentorum ad lunulas erutam, credidit esse veram. Tria hæc inquam, merentur aliquam considerationem, quia in illis cardo nostræ controversiæ vertitur; cætera aut à 3 punctis ad refellendum propositis dependent; aut declarant solùm, quem animum erga me Auctor gerat: proinde tam hæc, quàm illa præcipua discussione non indigent. Quod attinet ad* 1*mum*, inquit ille, *hæc propositio:* Peripheria est tripla diametri cum minori quàm $\frac{1}{7}$, & majori quàm $\frac{1}{9}$ ejusdem, *non solùm aliorum scriptorum Auctoris est præcipuum fundamentum, sed etiam* Methodi *demonstrativæ*,

ſtrativæ, ex illa enim deductæ ſunt notæ ſegmentorum pro veris reputatorum, per quas & ea, & rationem eorum ad lunulas correſpondentes erroneè in Theor: 2do Methodi demonſtr. *inveſtigavit, erroneè, inquam, nam ideò ſua ſegmenta aſſeruit eſſe vera, quia ſunt proportionalia lunulis veris.* Ideo ſegmenta mea ſunt vera, quia ad lunulas ſuas habent eandem rationem = 9 : 16; per quod diſtingvuntur ab omnibus aliis quantitatibus proportionalibus. Sic circuli æquè ac quadrata diametrorum ſunt quidem proportionalia lunulis; ſed non habent ad illas eandem rationem, quam habent ſegmenta. *En verba,* proſequitur Adverſarius, *capitalem errorem continentia: Cum ergo in hac quadruplici ſerie fractionum nullæ aliæ ad 4 lunulas 9,* $\frac{25}{4}$, 1 *&* $\frac{1}{4}$ *eandem habeant rationem* (debuiſſet addere = 9 : 16) *quàm* $\frac{243}{48}$, $\frac{225}{64}$, $\frac{351}{624}$ *&* $\frac{180}{1280}$; *evidens eſt, etiam nullas alias, quàm has eſſe poſſe ſegmenta.* Si propoſitio antecedens eſt vera, debet per demonſtrata etiam conſequens eſſe vera. Sed ratio 9 : $\frac{243}{48}$ multiplicata 1mùm per 48, & diviſa deinde per 27 eſt = 16 : 9, ratio 2da $\frac{25}{4}$: $\frac{225}{64}$ multiplicata per 64 eſt = 400 : 225: nam factor 64 eſt = 4 x 16. Omittendo itaque ex fractione $\frac{25}{4}$ denominatorem 4, fit reverà multiplicatio per 4; & multiplicandò porro 25 per 16, habetur lunula $\frac{25}{4}$ multiplicata per 64, & dividendo deinde utrinque per 25, prodit ratio 400 : 225 = 16 : 9. Ratio 3tia 1 : $\frac{351}{624}$ multiplicata per 624, & diviſa porro per 39 eſt = 16 : 9, & ratio 4ta $\frac{1}{4}$: $\frac{180}{1280}$ multiplicata per 4, & per 320, (quia 1280 eſt = 4 x 320) eſt = 320 : 180, & diviſa porro per 20, ut 16 : 9. Ergo 4 fractiones adductæ (ſegmenta) ſunt ad lunulas ſuas, ut 9 : 16. Ergo error mihi objectus exiſtit ſolùm in imaginatione Adverſarii. Ex Theoremate *n.* 2. explanato ſua ſponte fluit ſequens ratiocinium.

5. Lunula cum quavis fractione inter ſegmentum defect. & exces. intermedia conſtituit rationem novam: quot igitur in quavis ſerie ſunt fractiones diverſæ, tot prodeunt etiam rationes diverſæ, quarum aliæ ad veram ſenſim accedunt, aliæ ab ea paulatim recedunt. Si itaque per reductionem harum rationum ad terminos minimos in quavis ſerie prodeat tantùm unica communis aliis ſeriebus, neceſſe eſt, ut hæc ſit vera, ſiquidem lunulæ, quotquot dari poſſunt, nequeunt habere ad ſegmenta ſua, niſi unicam & eandem rationem veram. Jam cum inter 6 rationes diverſas 1mæ ſeriei, item inter 6 ſecundæ, item inter 10 tertiæ, item inter 5 quartæ ſeriei prodeat eadem ratio ut 16 : 9, & eadem etiam ſemper emergat, ſive denominatores communes 48, 64, 624, 1280 per alios numeros multiplicentur, ſive denominator communis 64 ubique aſſumatur; aſſumto autem denominatore communi 7, 9, 36 vel 63 &c. nulla ratio cæteris ſeriebus communis oriatur, palam eſt, rationem 16 : 9 eſſe legitimè inventam, conſequenter veram.

6. In confirmatione hujus Theorematis (*n.* 3) continetur argumentum ſimpliciſſimum quidem, ſed invictum, nempe: Ex quovis ſegmento vero gaudente denominatore 64, quod aſſumitur pro Anteceden-

te communi rationum inter lunulam defect. & exceſſivam intermediarum, reperitur eadem lunula vera, quæ ex quadrato ejusdem diam- cui ſegmentum reſpondet, invenitur; ſed ſi quadrata diametrorum pro Antecedentibus aſſumta, eſſent falsa; nunquam ex eis reperirentur lunulæ veræ: ergo etiam, ſi ſegmenta pro Antecedentibus poſita, eſſent falſa; nunquam ex eis reperirentur lunulæ veræ. Ergo. Propoſitio major eſt indubitata: nam poſitis diametris = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & aſſumtis deinde tam ſegmentis $\frac{9}{64}$, $\frac{36}{64}$, $\frac{81}{64}$, $\frac{144}{64}$, $\frac{225}{64}$, $\frac{324}{64}$, $\frac{441}{64}$, $\frac{576}{64}$, $\frac{729}{64}$, quàm quadratis iisdem diametris reſpondentibus, prodeunt ſemper utroque modo lunulæ veræ.

7. Adverſarius porro inquit: *Inſuper propoſitionem ſuam fundamentalem, à qua recedit, non refutavi, ut cuique intelligenti bene meam* Expoſitionem brevem *patebit, ſed ejus veritate in dubium vocata, aſſerui,* 1*mam illationem tot vicibus non eſſe legitimè factam, quod falſis demonſtrationibus evincere conatus eſt, peripheriam eſſe triplam diametri cum* $\frac{1}{8}$ *ejusdem: id quod adeò patenter demonſtravi, ut, cum non poſſit evidentiæ refragari, neget, ſe aliquando hunc in modum fuiſſe argumentatum, dicitque: Indignus eſſem nomine Geometræ, ſi feciſſem illationem tam abſurdam, atqui fecit, ergo.* Falſum eſt, me receſſiſſe à propoſitione fundamentali, ſiquidem ex omnibus ſcriptis meis contrarium elucet; quomodo autem dictum illud: *Indignus eſſem &c.* ſit intelligendum, id liquet ex *n.* 4. *At ne ſine fundamento,* pergit Adverſarius, *adſcribere ei videar illationem, quam ipſemet fatetur eſſe abſurdam; juvat in medium afferre demonſtrationes, quas in diverſis ſcriptis dedit pro hac propoſitione:* Peripheria eſt tripla diametri cum $\frac{1}{8}$ ejusdem. *En illarum primam, quæ habetur in ſcripto recenter edito ſub titulo:* Circuli quadratura octies demonſtrata. Nequeo ſatis mirari aſtutiam Adverſarii, qui ſuam propriam illationem abſurdam confundit cum mea vera, cujus ſenſus eſt talis: Si diameter unius puncti concipiatur diviſa per 7, 8 & 9; erit $\frac{1}{7}$ diametri = $\frac{1}{7}$ puncti; $\frac{1}{8}$ ejusdem = $\frac{1}{8}$ puncti, & $\frac{1}{9}$ diametri = $\frac{1}{9}$ puncti. Jam cum peripheria ſit diametri tripla cum minori quàm $\frac{1}{7}$ & majori, quàm $\frac{1}{9}$ ejusdem; nequit quantitas excedens triplum diametri eſſe alia, niſi $\frac{1}{8}$ ejusdem, h. e. $\frac{1}{8}$ puncti. (*En illationem malam,* exclamat hic Adverſarius, *quam Auctor ipſemet vocavit abſurdam, & quam refutavi ſub nota* b *in* Expoſitione brevi). Nam quoniam puncto diviſo in 7 particulas æquales, una earum conſtituit quantitatem excedentem triplum diametri juſtâ majorem, diviſo autem puncto in 9 particulas, una earum reddit illam juſtâ minorem; nequit punctum aliter concipi diviſum, niſi in 8 particulas æquales, quarum una quantitatem excedentem neceſſariò exhibet juſtam, quia $\frac{1}{8}$ puncti eſt paulò minor, quàm $\frac{1}{7}$. & aliquanto major quam $\frac{1}{9}$. Hic Adverſarius denuò exclamat: *Quàm præclaræ ultimo hoc loco allatæ rationes! ſecuſnè vetulæ de magnitudine buccellarum panis ex viſu judicant?*

cant? Adverſarius habet de *buccella panis* ideam æquè obſcuram, ac de *puncto:* nam *prior* nihil aliud eſt, niſi fruſtulum panis ori inditum, ſeu incluſum, quod itaque ab aliis videri nequit: unde de magnitudine buccellarum ne quidem homo tam acutæ naris, ac eſt Adverſarius, nedum vetula judicare poteſt. Jam vero *punctum* (non Mathematicum, quod eſt partium expers) eſt longitudo infinitè parva, nempe $\frac{1}{10}$ lineæ, $\frac{1}{100}$ digiti, & $\frac{1}{1000}$ pedis. Si igitur cogitemus, unum punctum diviſum eſſe in 7, aliud in 9, & 3tium in 8 particulas æquales; erit differentia inter particulas 1mi & 3tii puncti, item 2di & 3tii fere imperceptibilis: unde naturaliter loquendo, non poteſt aſſignari, niſi particula 3tii puncti h. e. $\frac{1}{8}$, quæ ſit inſenſibiliter minor, quàm particula puncti 1mi, h. e. $\frac{1}{7}$, & inſenſibiliter major, quàm particula ſecundi puncti, h. e. $\frac{1}{9}$. Aliæ fractiones inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$ puncti intermediæ, quæ ex variis reductionibus utriusque ad eandem denominationem oriuntur, ſunt tantùm imaginariæ, non autem reales.

8. Argumentum triviale, quo Adverſarius credit, ſe propoſitionem præcedentem in ſua *Expoſitione brevi* ſub nota *b* refutâſſe, ita ſonat: *Inter* $\frac{1}{7}$ *&* $\frac{1}{9}$ *diametri non unica eſt fractio intermedia* $\frac{1}{8}$, *ſed innumeræ aliæ: nam reductis fractionibus* $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ *ad eundem denominatorem prodit* $\frac{1}{7} = \frac{72}{504}$, $\frac{1}{8} = \frac{63}{504}$ *&* $\frac{1}{9} = \frac{56}{504}$, *&* $\frac{72}{504} - \frac{56}{504} = \frac{16}{504}$. *Ex hac differentia addendo ſucceſſivè* $\frac{1}{504}$ $\frac{2}{504}$ $\frac{3}{504}$ &c. *ad* $\frac{1}{9}$; *vel ſubtrahendo ab* $\frac{1}{7}$, *obtinebuntur* 15 *fractiones intermediæ, inter quas habebit etiam locum* $\frac{1}{8} = \frac{63}{504}$. *Ergo inter* $\frac{1}{7}$ *&* $\frac{1}{9}$ *non ſola eſt fractio intermedia* $\frac{1}{8} = \frac{63}{504}$, *ſed etiam* $\frac{57}{504}$ $\frac{58}{504}$ $\frac{59}{504}$ $\frac{60}{504}$ $\frac{61}{504}$ &c. *conſequenter ratio vera diametri ad peripheriam poteſt eſſe vel* $1 : 3\frac{57}{504}$ *vel* $1 : 3\frac{58}{504}$ *vel* $1 : 3\frac{59}{504}$ *vel* $1 : 3\frac{60}{504}$ *vel* $1 : 3\frac{61}{504}$ &c. *non autem* $1 : 3\frac{63}{504} = 1 : 3\frac{1}{8} = 8 : 25$. Ad hoc reſpondeo 1*mo:* fractiones inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$ puncti inventæ, ſunt tantùm entia rationis, quæ in rerum natura dari nequeunt: nam eo jure, quo Adv. concludit, punctum poſſe dividi in 504 particulas, eodem illud poteſt concipi diſtributum in 1000. Si itaque una earum aſſumatur pro diametro, erit periph: ejus tripla cum $\frac{1}{8}$, non autem cum aliquot 504000 particulis puncti. 2*do:* inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$ menſuræ, e. gr. lineæ, digiti, pedis &c. dantur quidem revera innumeræ fractiones intermediæ: non obſtantibus tamen eis ratio diam. ad periph. $= 8 : 25$ manet inconcuſſa: nam quoniam per *n.* 2 & 3, item per §. 33. & 37. *Rationis veræ* ſegmentum eſt ad lunulam, ut $9 : 16$; evidens eſt, $\frac{1}{2}p - 1$, h. e. exponentem hujus rationis eſſe $\frac{9}{16}$, & $\frac{1}{2}p = \frac{9}{16} + \frac{15}{16} = \frac{25}{16}$, conſequenter *p.* integrum, h. e. exponentem rationis peripheriæ ad diametrum $= \frac{25}{8}$. Poſita itaque diametro 1, peripheria eſt $\frac{25}{8}$, conſequenter prior ad poſteriorem, ut $1 : \frac{25}{8} = 8 : 25 = 1 : 3\frac{1}{8}$. Falſum eſt igitur aſſertum Adverſarii, me areas ſemicirculorum, quorum diametri erant 6, 5, 2, 1, in *Methodo* 1mum per rationem 8 : 25 inveſtigaſſe, & deinde ſegmenta ex eis deduxiſſe. 3*tio.* Inter $\frac{1}{4}$ & 0; $\frac{1}{6}$ & 0; $\frac{2}{8}$ & $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{9}$ &

$\frac{7}{10}$;

$\frac{1}{10}$; $\frac{2}{11}$ & $\frac{1}{12}$ &c. diametri, *vide Præfationem*, dantur longè plures fractiones intermediæ, quàm inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$ diametri: nihilominus tamen quantitas excedens triplum diametri nequit esse alia, nisi $\frac{1}{8}$ (§. 24. 25.). Ergo.

9. Quod tandem concernit 3tium punctum, hoc est *æquationem* mihi objectam, res ita se habet: Ad demonstrandum, segmenta esse ad lunulas, ut 9 : 16, usus fui hocce argumento: Posita diametro 8, prodeunt (per *n.* 2.) segmenta $\frac{64}{7}$ & $\frac{80}{9} = \frac{576}{63}$ & $\frac{560}{63}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y = \frac{16}{63}$; ex qua deinde intuli x seu excessum esse $\frac{1}{7}$, & y seu defectum $\frac{1}{9}$, consequenter $\frac{64}{7} - \frac{1}{7} = \frac{80}{9} + \frac{1}{9}$, esse segmentum verum, & rationem ejus ad lunulam = 9:16. Jam cum ex natura æqualium constet, æquationem non tolli, quomodocunque quantitates unius membri per signa contraria transferantur ad alterum; palam est, etiam $\frac{64}{7} - \frac{1}{9}$ esse $= \frac{80}{9} + \frac{1}{7}$. Hinc Adversarius inquit: *Ponat Auctor* $X = \frac{1}{9}$ *&* $y = \frac{1}{7}$, *utique etiam* $\frac{1}{9} + \frac{1}{7} = \frac{7}{63} + \frac{9}{63} = \frac{16}{63}$ *differentiæ segmentorum. Præterea cum sit ignotum, quodnam segmentum minus, quodnam autem magis à vero aberret; eodem jure X potest valere* $\frac{1}{9}$ *ac* $\frac{1}{7}$, *idem dicendum de* y. Hæc objectio solvitur tribus modis: 1. Numerator summæ $x + y = \frac{16}{63}$ est aggregatum ex denominatoribus 7 & 9 segmentorum falsorum $\frac{64}{7}$ & $\frac{80}{9}$: ergo per Theorema Problematis 2di, $\frac{1}{7}$ debet esse excessus & $\frac{1}{9}$ defectus, non autem vice versa. 2. In Theoremate 8vo reperiuntur 8 defectus, nempe: $\frac{6}{6}$ $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{18}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{6}{22}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{10}{26}$, $\frac{12}{28}$, & totidem excessus, scilicet: $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{5}{19}$, $\frac{3}{21}$, $\frac{1}{23}$, $\frac{15}{25}$, $\frac{13}{27}$. Si itaque priores 8 partes ex segmentis excessivis auferrentur, & posteriores 8 ad defectiva adderentur; prodirent 8 segmenta ejusdem diametri 8 & lunulæ = 16, diversa, consequenter etiam 8 rationes ad lunulas diversæ. Ergo in nostro casu nequit loco x poni y, & vice versa. 3. Variis in locis invictè demonstravi, diametrum esse ad peripheriam ut 8 : 25: ergo etiam segmentum debet esse ad lunulam ut 9 : 16.

10. Quoniam Adversarius, ut liquet ex *n.* 7, dubitat de veritate hujus propositionis: *Periph. est diam. 3pla cum minori, quàm* $\frac{1}{7}$, *& majori quàm* $\frac{1}{9}$ *parte ejusdem*, assumatur pro Antecedente communi rationis exces. numerus 100, & pro consequente successivè unus ex sequentibus 313, 314 usque ad 325 inclusivè; ratio defect. autem adhibeatur ubique = 9 : 28, ita patebit, posita diametro 8 pro 3tio termino cujusvis proportionis, & factis deinde faciendis (§. 7. 22. 4. 6.) quantitatem excedentem 3plum diametri esse vicies sexies = $\frac{1}{8}$. Sed $\frac{1}{8}$ est minor, quàm $\frac{1}{7}$, & major, quàm $\frac{1}{9}$: Ergo. Calculus est facillimus institutu, quia denominator minor 9 solam differentiam 1mam cujuslibet ex 13 Operationibus exactè metitur: unde nusquam plures, quàm 2 partes determinari possunt. Hæc sunt, quæ Orbis eruditi judicio acutissimo omni, qua par est observantia, committo, spe fretus, tot Luminaria haud esse passura, ut veritates tam evidenter demonstratæ ecclipsentur.




Biblioteka Jagiellońska
stdr0026012

